

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

- 1) [20 ptos.] Determinar el término independiente de x , en el desarrollo de

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^{17} \left(x - \frac{2}{x}\right)$$

[20 ptos.] Alternativa 1: Encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(1+x)^m$ sea 6.

[20 ptos.] Alternativa 2: Encontrar $a \in \mathbb{R}$ tal que los coeficientes de x^2 y x^3 , en el desarrollo de $(3+ax)^9$, sean iguales.

- 2) [20 ptos.] Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la progresión geométrica, de razón positiva, cuyo tercer y quinto término son 18 y 162, respectivamente. Sea S_n la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- [5 ptos.] Determinar una fórmula explícita para el término a_n .
- [5 ptos.] Muestre que $S_n = 3^n - 1$
- [10 ptos.] Use el principio de inducción para demostrar que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)(S_n \geq 2n)$$

- Alternativa: [10 ptos.] Use el principio de inducción para demostrar que

$$(\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1)(S_{2k} \text{ es múltiplo de } 8)$$

- 3) [20 ptos.] Considere los números complejos $u = 1 - i\sqrt{3}$ y $v = \frac{\sqrt{3} + i}{4}$.

- [10 ptos.] Escribir $z_1 = \frac{u}{v}$ en la forma binomial $a + bi$.
- [10 ptos.] Simplificar $u^5 v^{10}$.

Pauta

1) Desarrollando el binomio, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{2}{x}\right)^{17} \left(x - \frac{2}{x}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} x^{17-k} (2x^{-1})^k\right) \left(x - \frac{2}{x}\right) \\&= \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^k \cdot x^{17-2k} x - \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^{k+1} \cdot x^{17-2k} x^{-1} \\&= \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^k \cdot x^{18-2k} - \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} 2^{k+1} \cdot x^{16-2k}\end{aligned}$$

Note entonces que el término independiente de x , aparece en la primera suma, para $k \in [0, 17] \subset \mathbb{N}$ tal que $18 - 2k = 0$, es decir, para $k = 9$. De modo similar, el término independiente de x , aparece en la segunda suma, para $k \in [0, 17] \subset \mathbb{N}$ tal que $16 - 2k = 0$, es decir, para $k = 8$. Por lo tanto, el término independiente de x en el desarrollo es

$$\binom{17}{9} 2^9 - \binom{17}{8} 2^9 = \left(\frac{17!}{9!8!} - \frac{17!}{8!9!}\right) 2^9 = 0$$

Alternativa 1: Usando el teorema del binomio, se tiene que

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k}$$

Luego, el coeficiente de x^2 se obtiene cuando $k = m - 2$, y el cual es $\binom{m}{m-2}$. Entonces, buscamos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{m!}{2!(m-2)!} = \binom{m}{m-2} = 6$$

o equivalentemente $(m-4)(m+3) = m^2 - m - 12 = 0$. De lo cual se tiene que $m = 4$ es el valor buscado.

Alternativa 2: Usando el teorema del binomio, tenemos que

$$(3+ax)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 3^{9-k} (ax)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 3^{9-k} a^k x^k$$

Luego, buscamos $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\binom{9}{2} 3^7 a^2 = \binom{9}{3} 3^6 a^3$$

$$\Leftrightarrow 36 \cdot 3 = 84a$$

Por lo tanto $a = 9/7$.

2) Tenemos:

a) Sea a el primer elemento de la sucesión y r la razón, luego tenemos que

$$a_2 = ar^2 = 18 \quad \text{y} \quad a_4 = ar^4 = 162$$

Esto implica que $r^2 = 9$. Como $\{a_n\}$ tiene razón positiva, escogemos $r = 3$. Reemplazando este valor en alguna de las dos igualdades anteriores, se tiene que $a = 2$. Así concluimos que $a_n = 2 \cdot 3^n$, para $n \geq 0$.

b) Usando directamente la suma de los primeros n términos para una P.G. tenemos que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot 3^k = 2 \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 3^n - 1$$

c) Del item anterior, la proposición se puede reescribir como

$$p(n) : (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)(3^n - 1 \geq 2n)$$

El primer paso de inducción se satisface claramente, pues $2 = 3^1 - 1 \geq 2(1) = 2$.

Ahora, supongamos que la proposición $p(n) : 3^n - 1 \geq 2n$ es verdadera. Luego

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1 = 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n \underset{\text{Hip. ind.}}{\geq} 2n + 2 \cdot 3^n \underset{\text{pues } 3^n \geq 1}{\geq} 2n + 2 = 2(n + 1)$$

es decir, la proposición $p(n + 1) : 3^{n+1} - 1 \geq 2(n + 1)$ es verdadera, concluyendo así la demostración.

Alternativa: Del item anterior, la proposición se puede reescribir como

$$p(n) : (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)(3^{2^k} - 1 \text{ es múltiplo de } 8)$$

El primer paso de inducción se satisface claramente, pues $3^2 - 1 = 8 = 8 \cdot 1$.

Ahora, supongamos que la proposición $p(n) : 3^{2^k} - 1$ es múltiplo de 8 es verdadera. Esto es, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2^k} - 1 = 8t$. Luego

$$3^{2^{k+2}} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2^k} - 1 = (3^{2^k} - 1) + 8 \cdot 3^{2^k} \underset{\text{Hip. ind.}}{=} 8t + 8 \cdot 3^{2^k} = 8 \underbrace{(t + 3^{2^k})}_{\in \mathbb{Z}}$$

es decir, la proposición $p(n + 1) : 3^{2^{(k+1)}} - 1$ es múltiplo de 8 es verdadera, concluyendo así la demostración.

3) Números complejos:

a) Tenemos

$$z_1 = 4 \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3} - 2i}{4} = 2\sqrt{3} - 2i$$

b) Para escribir la forma polar de u debemos determinar un ángulo θ tal que $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$ y además tener en cuenta que u está en el cuarto cuadrante. Luego $\theta = -\pi/3$. Así, la forma polar de u es $2 \cdot \text{cis}(-\pi/3)$. Del mismo modo, para v buscamos un ángulo α tal que $\tan(\alpha) = 1/\sqrt{3}$, y además, tener en cuenta que v está en el primer cuadrante. Luego $\alpha = \pi/6$. Por lo tanto, la forma polar de v es $(1/2)\text{cis}(\pi/6)$.

Usando el teorema de Moivre, tenemos que

$$\begin{aligned} u^5 v^{10} &= 2^5 \cdot \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2^{10}} \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}} \cdot \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2^5} \cdot \text{cis}(0) \\ &= \frac{1}{2^5} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$